Двадцатый Первый Российский Фестиваль юных математиков

Адлер. 14 октября 2010.

Второй тур. Лига тактик

1. На клетчатой плоскости $n^2 + 2n$ солдат выстроились в форме прямоугольника $n \times (n+2)$. По команде командира каждый солдат перешел на соседнюю по стороне клетку или остался на своей. После команды оказалось, что солдаты теперь образуют прямоугольник $(n+2) \times n$. Докажите, что n — четно.

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABC = 90°$, $AC = DC$, $\angle DCA = \angle$
Точка F – середина стороны AD, отрезки BF и AC пересекаются в точке L. Докажите, что $CL = CB$.

3. Пусть a, b, c и d — положительные числа. Докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{a^2+2bc+d^2} + \frac{b^2}{b^2+2cd+a^2} + \frac{c^2}{c^2+2da+b^2} + \frac{d^2}{d^2+2ab+c^2} \geqslant 1.$$

4. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в белый или черный цвет. Сколько существует таких раскрасок, что в каждом квадратике 2×2 поровну черных и белых клеток?

5. На отрезке $[0, 1]$ выбрано несколько непересекающихся отрезков так, что никакие две точки из выбранных отрезков не лежат на расстоянии $\frac{1}{10}$. Докажите, что суммарная длина выбранных отрезков не превосходит $\frac{1}{2}$.

6. Решите в натуральных числах уравнение: $m^4 - 6m^2 + 1 = 7 \cdot 2^n$.

7. В некоторой компании работает $2n+1$ человек. В главном офисе комании стоит сейф, снабженный k различными замками, при этом открыть этот сейф можно только имея ключи от всех замков. Правила, принятые в этой компании требуют, чтобы любой набор сотрудников, состоящий хотя бы из $n+1$ человека мог открыть сейф, а любой набор сотрудников, состоящий не более, чем из n человек не мог открыть этот сейф. Каждый сотрудник имеет ключи от некоторого (для всех одинакового) количества замков. При каком минимальном k возможно удовлетворить правилам компании?

8. В 10 коробках лежат камни: в k-ой коробке лежит $2000 + k$ камней ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Двое играют в такую игру: один из игроков выбирает любые 5 коробок и вынимает из каждой из них некоторое ненулевое количество камней. Тот, кто не может сделать ход проигрывает. Кто из игроков выиграет при правильной игре?

9. Найдите все неотрицательные x, y и z, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\begin{cases} x^2y^2 + 1 = x^2 + xy \\ y^2z^2 + 1 = y^2 + yz \\ z^2x^2 + 1 = z^2 + zx. \end{cases}$$

10. Через точку P к окружности ω проведены касательные PA и PB и секущая, пересекающая окружность в точках X и Y. Точка S на окружности ω такова, что $BS \| PX$. Докажите, что отрезок AS делит отрезок XY пополам.